

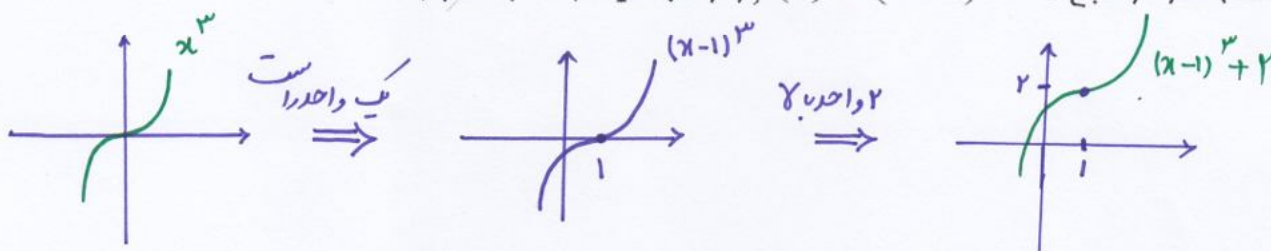


نام و نام خانوادگی: کلاس: دوازدهم تجربی ○ موضوع امتحان: نوبت اول ریاضی ۳ نام دبیر:

در این قسمت چیزی ننویسید

رمز:

(الف) نمودار تابع $f(x) = (x-1)^3 + 2$ را رسم کنید. (۷۵/۰ نمره)



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

(ب) دامنه و برد آن را به دست آورید. (۵/۰ نمره)

(۲) الف) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ مطلوب است یافتن دامنه تابع $f \circ g$. (۱ نمره)

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = (-\infty, 1]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \leq 1 \mid \sqrt{1-x} \neq 0\} = (-\infty, 1)$$

$x \neq 1$

(ب) اگر $f(x) = \frac{px-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{px+p}{p-x}$ ضابطه $g \circ f(x)$ را بیابید. (۷۵/۰)

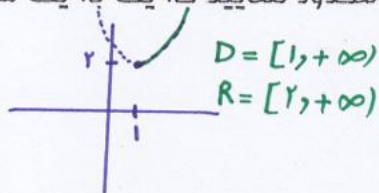
$$g \circ f(x) = g\left(\frac{px-1}{x+1}\right) = \frac{2\left(\frac{px-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{px-1}{x+1}\right)} = \frac{\frac{2px-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-px+1}{x+1}} = \frac{2x}{\frac{3-x}{x+1}} = 2x$$

(۳) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را چنان محدود نمایید که یک به یک شود، سپس ضابطه تابع وارون

را در دامنه فوق به دست آورید. (۱ نمره)

$$x_{\text{پس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$



$$f(x) = (x^2 - 2x + 3) = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow y - 2 = (x-1)^2$$

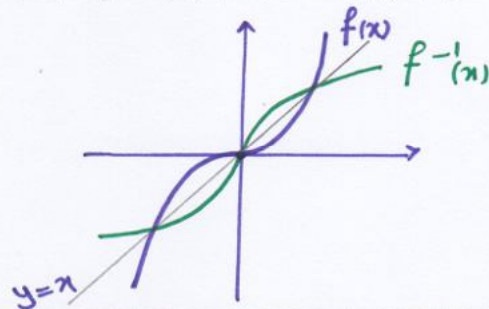
$$\longrightarrow \sqrt{y-2} = |x-1| \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y-2} = x-1 \longrightarrow 1 + \sqrt{y-2} = x$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ عوض}} y = 1 + \sqrt{x-2} \longrightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2} \quad D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

در این قسمت چیزی ننویسید

۱۴) اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار $f^{-1}(x)$ را (رسم کنید. ۱ نمره)

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



۱۵) نمودار تابع $f(x) = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف راست انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی

نمودار حاصل با محور x غیر منفی شود؟ (۱ نمره)

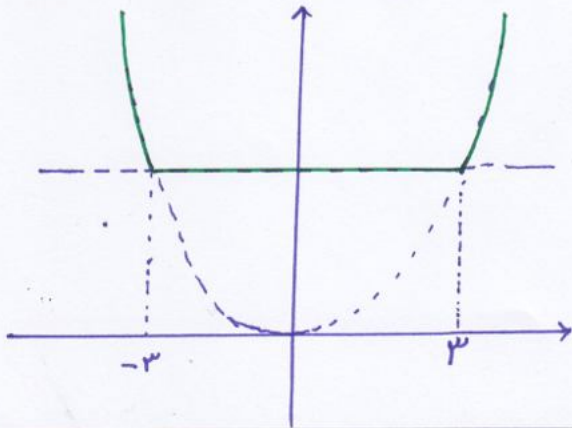
$$x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$$

یعنی ریشه منفی نداشته باشد

اگر ۲ واحد به راست انتقال دهیم ریشه منفی نخواهد شد
 $\rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$

۱۶) بزرگترین بازه ای را بیابید که تابع زیر روی آن صعودی باشد؟ (۱ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x^2 \geq 9 \rightarrow x \leq -3 \text{ یا } x \geq 3 \\ 9 & ; x^2 < 9 \rightarrow -3 < x < 3 \end{cases}$$



بزرگترین بازه: $[-3, +\infty)$

۱۷) دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = \sqrt{3} - \cos(\frac{x}{4})$ را به دست آورید. (۱ نمره)

$$f(x) = -\cos(\frac{x}{4}) + \sqrt{3}$$

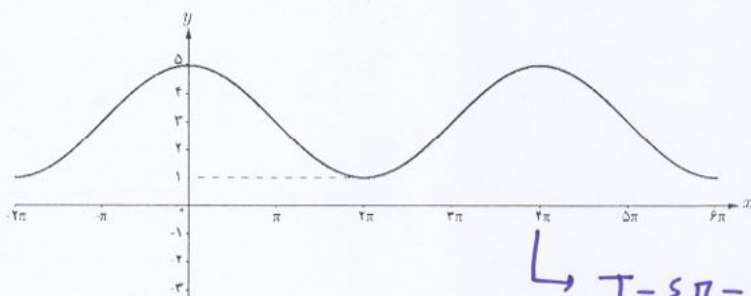
$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$$

$$\text{Max} = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{min} = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

در این قسمت چیزی ننویسید

۸) ضابطه تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید. (۱ نمره)



$$f(x) = a \cos bx + c$$

$$\begin{cases} \text{Max} = 5 \\ \text{min} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} c &= \frac{\text{Max} + \text{min}}{2} = 3 \\ |a| &= \frac{\text{Max} - \text{min}}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$$

۹) مقدار $\cos 22.5^\circ$ را بیابید. (۱ نمره)

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 22.5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2}$$

$$\rightarrow \cos^2 22.5^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

۱۰) هریک از معادلات زیر را حل نمایید. (۲ نمره)

$$\cos 2x - \sin x + 2 = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غلط} \end{cases}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x$$

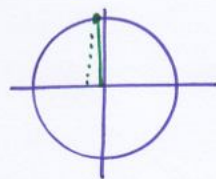
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

در این قسمت چیزی ننویسید

(۱۱) حاصل هریک از مدهای زیر را بیابید. (۵/۳ نمره)

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^3 + x - 2} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$



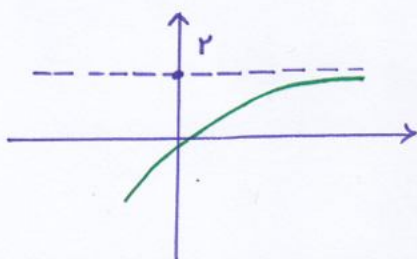
پ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 5} = \frac{0+0}{0-5} = -\frac{0}{5}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x^3}{2x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

(۱۲) الف) رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ به چه معناست؟ (۱ نمره) $f(x)$ را به هر مقدار درخواه می توان به ۲ نزدیک کرد

مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.



ب) یک نمودار برای تابع $f(x)$ با ویژگی فوق رسم کنید. (۵/۰ نمره)

(۱۳) معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = x^3 - 1$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید. (۱ نمره)

نقطه $\left. \begin{array}{l} 2 \\ f(2) = 2^3 - 1 = 7 \end{array} \right|$ $m = f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1 - 7}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 4 + 4 + 4 = 12$

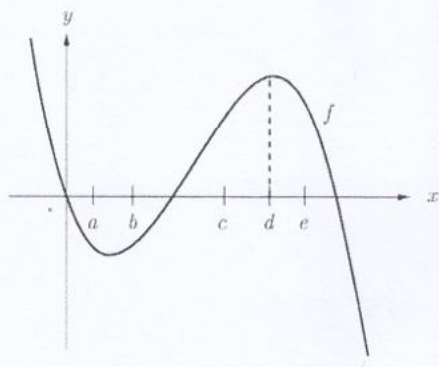
$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y - 7 = 12(x - 2)$

$y = 12x - 17$

در این قسمت چیزی ننویسید

۱۴) با توجه به نمودار مقابل، مقادیر مشتق تابع $f(x)$ را در نقاط a, b, c, d, e با هم مقایسه کنید. (۱)

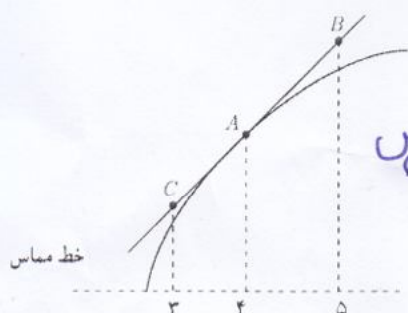
کوچک به بزرگ بنویسید. (۱ نمره)



$$f'(c) > f'(b) > f'(d) > f'(a) > f'(e)$$

۱۵) برای تابع f در شکل روبرو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. مختصات نقاط A, B و C را بیابید. (۱)

(نمره)



نقطه $x=4$ بر منحنی
مختصات $A(4, 25)$

$$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y - 25 = 1/5(x - 4)$$

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow y-25 = 1/5(3-4) \Rightarrow y=23/5 \Rightarrow C | 23/5 \\ x=5 \Rightarrow y-25 = 1/5(5-4) \Rightarrow y=26/5 \Rightarrow B | 26/5 \end{cases}$$

موفق باشید

نمره ورقه به عدد:

نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده:

نام و نام خانوادگی مصمم:

نمره ورقه به مروف:

محل امضا

محل امضا